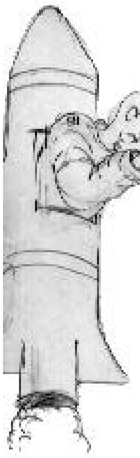
ज़रा सिर खुजलाइए

नेपच्यून ग्रह के वलय

भागः 1

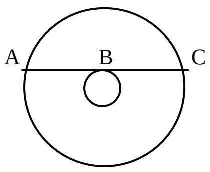
मार्टिन गार्डनर



चित्रः आमोद कारखानिस

अंतरिक्ष यान वरुण पर कैप्टन आफताब विभिन्न प्रकार की रेखाकृतियां बनाने में व्यस्त थे। बीच में रुककर वे अपने केलकुलेटर पर कुछ गणनाएं करते।

आफताब का काम था नेपच्यून ग्रह के बारे में जानकारी प्राप्त करना। अंतरिक्ष यान वरुण पर मौजूद समस्त यात्रियों को यह देखकर अत्यन्त हैरानी हुई कि नेपच्यून ग्रह के आसपास अल्प घनत्व की धूल का विशाल छल्ला है। इस छल्ले की मोटाई केवल एक सेंटीमीटर है और यह पृथ्वी पर मौजूद दूरबीनों से बिल्कुल भी दिखाई नहीं देता।



इस विशाल वलय का अंदरूनी और बाहरी हिस्सा एकदम वृत्ताकार है। अंतरिक्ष यान का पथ इस तरह था कि उसने छल्ले के बाहरी वृत्त को A पर भेदा, अंदरूनी वृत्त को बिंदु B पर स्पर्श किया और फिर से बाहरी वृत्त को भेदता हुआ C से बाहर निकल गया।

“हमें मालूम है कि AC दूरी 2,00,000 कि.मी. है,” कैप्टन आफताब ने कहा, “अब सवाल यह है कि इस चकती का क्षेत्रफल कितना है?”

“क्या हमें बाहरी और भीतरी वृत्तों की त्रिज्या की ज़रूरत नहीं होगी?” लेफ्टिनेंट मेहताब ने पूछा।

“वो जानकारी तो हमें बाद में मिल ही जाएगी,” कैप्टन ने कहा, “परन्तु अभी के लिए हमें उसकी ज़रूरत नहीं है। अपनी कॉलेज की पढ़ाई के दौरान, ऐसा कोई प्रमेय पढ़ा था कि ऐसे वलय का क्षेत्रफल चाप AC से तय किया जा सकता है।”

“तुम्हारा कहना है कि AC की लम्बाई दी गई है, तो वृत्तों का आकार कुछ भी हो, चकती का क्षेत्रफल उतना ही रहेगा,” लेफ्टिनेंट ने पूछा।

“बिल्कुल सही! यकीन करना मुश्किल है परन्तु यह सही है। मैं याद करने की कोशिश कर रहा हूं कि इसकी गणना कैसे की जाती है,” आफताब ने जोड़ा।

नेप्च्यून के इस वलय का क्षेत्रफल कैसे निकालेंगे और कितना होगा यह?

भागः 2 देखिए पृष्ठ क्रमांक 00 पर।

ज़रा सिर खुजलाइए

नेपच्यून ग्रह के वलय

चित्रः आमोद कारखानिस

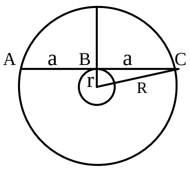
भागः 2

साथ में दिए चित्र के अनुसार a रेखाचाप AC का आधा है।
मान लें कि r अंदरूनी वृत्त की त्रिज्या है और
R बाहरी वृत्त की त्रिज्या है।
इसलिए अंदरूनी वृत्त का क्षेत्रफल πr^2 है और
बाहरी वृत्त का क्षेत्रफल πR^2
यानी कि चकती का क्षेत्रफल $= \pi R^2 - \pi r^2$

$$= \pi (R^2 - r^2) \quad ......1$$

चूंकि r और a एक समकोण त्रिभुज की दो भुजाएं हैं और R उसका कर्ण है। इसलिए पायथोगोरस के सिद्धान्त के अनुसार

$$a^2 + r^2 = R^2$$
$$a^2 = R^2 - r^2$$



समीकरण 1 में इस समीकरण का इस्तेमाल करते हुएः
चकती का क्षेत्रफल $= \pi a^2$
चूंकि a 1,00,000 किमी है
वलय का क्षेत्रफल $= \pi \times 1{,}00{,}000^2$

$$= 3.14 \times 1{,}00{,}000^2$$
$$= 31{,}41{,}59{,}26{,}535.89 \text{ वर्ग किलोमीटर।}$$

कैप्टन आफताब चुपचाप ये सब गणनाएं करने में मशगूल थे और इस बीच लेफ्टिनेंट मेहताब दो-तीन तरह की मदिरा मिलाकर अपने लिए एक विशेष पेय बना रहे थे।

“मुझे जवाब मिल गया,” आफताब ने ज़ोर से कहा, “वलय का क्षेत्रफल है ....।” बीच में टोकते हुए लेफ्टिनेंट मेहताब ने कहा, “बताना मत, मुझे अंदाज़ लगा लेने दो।” एक पुराने लिफाफे को पलटकर उस संख्या को देखते हुए जो उसने कुछ समय पहले लिखी थी, मेहताब ने कहा,
“31,41,59,26,535.8979 वर्ग किलोमीटर।”
“मेहताब, कभी-कभी तो तुम मुझे अचंभे में डाल देते हो। तुम्हारा अंदाज़ बिल्कुल सही है, परन्तु ये सब बीजगणित तुमने कैसे कर लिया?”
“मुझे बीजगणित की ज़रूरत ही नहीं पड़ी। बस, वृत्त के क्षेत्रफल का सूत्र मुझे याद है - πr^2

लेफ्टिनेंट मेहताब ने इतनी आसानी से इस सवाल को कैसे हल किया होगा?

भागः 3 देखिए पृष्ठ क्रमांक 00 पर।

ज़रा सिर खुजलाइए

नेपच्यून ग्रह के वलय

चित्रः आमोद कारखानिस

भागः 3

लेफ्टिनेंट मेहताब का तर्क था, "जब कैप्टेन ने कहा कि चाप की लम्बाई अगर नियत है तो वलय का क्षेत्रफल उतना ही यानी constant रहता है, तो मैंने उनकी बात पर विश्वास कर लिया। अगर यह सही है तो अंदरूनी वृत्त कितना बड़ा या छोटा है इस बात का कोई फर्क नहीं पड़ना चाहिए। इसलिए चलिए अंदरूनी वृत्त को न्यूनतम मान लेते हैं - शून्य त्रिज्या का एक वृत्त यानी केवल एक बिन्दु। ऐसी स्थिति में चाप बाहरी वृत्त का व्यास बन जाता है और पूरा बाहरी वृत्त वह वलय बन जाता है जिसका क्षेत्रफल हमें निकालना है। इसलिए उसका क्षेत्रफल होगा पाई गुणित त्रिज्या का वर्ग।"

लेफ्टिनेंट मेहताब ने अपनी बात जारी रखते हुए कहा, "इसलिए मुझे केवल π को 1,00,000 x 1,00,000 से गुणा करना था। यह कदम तो एकदम आसान था क्योंकि इसमें केवल π के दशमलव बिन्दु को दस अंक दाहिनी ओर सरकाना था।"

"बहुत ही सुंदर !" कैप्टन आफताब ने कहा, "परन्तु π का मूल्य दाशमलव के बाद 14 अंकों तक तुम याद कैसे रख पाए?"

इस बात का जवाब देने से पहले मेहताब ने रंगीन मदिरा का प्याला आफताब को दिया और अपना प्याला उठाते हुए कहा, "How I want a drink! Alcoholic, of course, after the heavy chapters involving quantum mechanics."

जब तक आफताब और मेहताब मदिरापान करते हैं, क्या आप बताएंगे कि -

लेफ्टिनेंट मेहताब को p का मान दशमलव के बाद चौदह अंकों तक कैसे याद रहा?

भागः 4 देखिए पृष्ठ क्रमांक 00 पर।

ज़रा सिर खुजलाइए

नेपच्यून ग्रह के वलय

भागः 4


चित्रः आमोद कारखानिस

जवाब लेफ्टिनेंट मेहताब के उस वाक्य में ही था जो How I want a drink .... से शुरू होता है। इस वाक्य में शब्दों के अक्षरों की संख्या π के मान को प्रदर्शित करती है - 3.14159265358979। प्रसिद्ध ब्रिटिश खगोलशास्त्री सर जेम्स जीन्स ने π का मान याद रखने के लिए यह वाक्य बनाया था। पाई और इस तरह की कई अन्य अपरिमेय संख्याओं (irrational numbers) को याद रखने के लिए बहुत से ऐसे तरीके अपनाए गए हैं। पाई का मान सात अंकों तक याद रखने के लिए एक और ऐसा आसान-सा वाक्य है "May I have a long container of coffee?"

बहुत-सी खूबसूरत गणितीय पहेलियां काफी जल्दी सुलझाई जा सकती हैं अगर यह मान लिया जाए कि इस समस्या का हल संभव है; जैसा कि पिछले सवाल में हमने देखा।

ऐसा ही एक सवाल त्रिआयामी संदर्भ में भी है। लकड़ी के एक गोले (Sphere) के ठीक बीच से एक नलाकार छेद किया जाता है। इस नलाकार छेद की लम्बाई 6 इंच है तो शेष बचे लकड़ी के गोले का आयतन क्या होगा?

बीजगणित को इस्तेमाल करते हुए इस सवाल का मुश्किल हल तो ढूंढा ही जा सकता है। परन्तु यहां भी अगर हम मान लें कि इस सवाल का हल संभव है तो उसका अर्थ हुआ कि छेद का आकार कुछ भी हो शेष बची लकड़ी का आयतन उतना ही रहेगा, तो फिर मान लेते हैं कि इस नलाकार छेद की चौड़ाई शून्य है। ऐसी स्थिति में शेष बची लकड़ी के गोले का आयतन यानी 6 इंच के व्यास के गोले का आयतन।

6 इंच के व्यास के गोले का आयतन $4/3\pi r^3$ r = गोले की त्रिज्या

$$= \frac{4}{3} \times p \times 3^3$$

$$= 36p$$ घन इंच

मार्टिन गार्डनरः बीसवीं सदी के गणितज्ञ एवं तर्कवादी। उन्होंने अपने लेखन से प्रयास किया कि गणितीय तार्किक पहेलियां गंभीर चिंतन एवं विषय को सीखने का ज़रिया बन सकें।

यह सवाल मार्टिन गार्डनर के विज्ञान पहेलियों के पेंगुइन द्वारा प्रकाशित संकलन 'सायंस फिक्शन पज़ल टेल्स' से साभार।